

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 49 - חשבון אינטגרלי - חישובי נפחים של גופים ובעיות קיצון עם
אינטגרלים

תוכן העניינים

1. חישוב נפחים באמצעות האינטגרל.....1
2. בעיות קיצון עם אינטגרלים.....6

חישוב נפחים באמצעות האינטגרל:

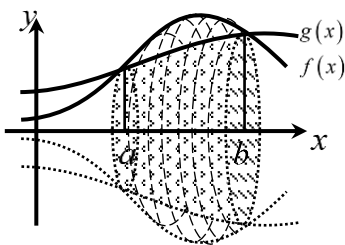
סיכום כללי:



- נפח הגוף שנוצר עקב סיבוב הפונקציה $f(x)$ סביב ציר ה- x בגבולות: $x=a$ ו- $x=b$ נתון ע"י האינטגרל

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

הבא:



- בפרט עבור גוף הנוצר ע"י בסיס שטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ נקבל את

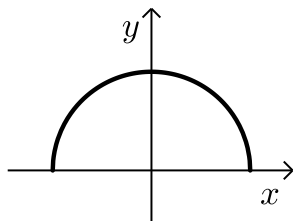
$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

הנוסחה הבאה:

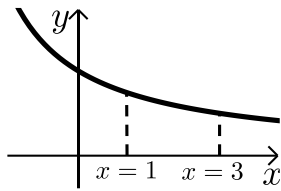
שאלות:



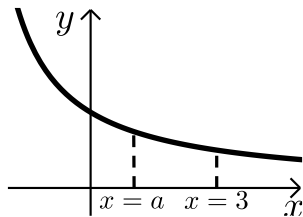
- 1) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 + 1$.
השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $x=3$ והצירים מסתובב סביב ציר ה- x .
חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל באופן זה.



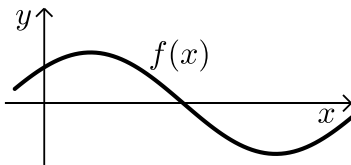
- 2) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.
 - א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 - ב. חשב את נפח הגוף שנוצר ע"י סיבוב גרף הפונקציה סביב ציר ה- x .



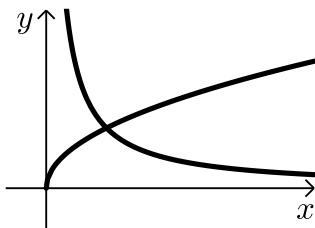
- (3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{12}{x+3}$ בתחום: $x \geq 0$.
 גרף הפונקציה מסתובב סביב ציר ה- x .
 מסמנים את נפח הגוף שנוצר בין הגבולות $0 \leq x \leq 1$
 ב- V_1 ואת נפח הגוף שנוצר בתחום: $1 \leq x \leq 3$ ב- V_2 .
 חשב את היחס: $\frac{V_1}{V_2}$.



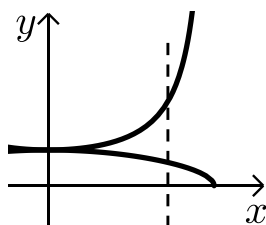
- (4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{12}{x+3}$ בתחום: $x \geq 0$.
 גרף הפונקציה מסתובב סביב ציר ה- x .
 מסמנים את נפח הגוף הנוצר בין הגבולות $0 \leq x \leq a$
 ב- V_1 ואת נפח הגוף שנוצר בתחום: $a \leq x \leq 3$ ב- V_2 .
 מתקיים: $V_1 = V_2$. מצא את a .



- (5) נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x + \cos x$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.
 השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים ברביע הראשון
 מסתובב סביב ציר ה- x .
 מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



- (6) בשרטוט נתונות הפונקציות ברביע הראשון:
 $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.
 מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר, כאשר השטח הכלוא
 בין הפונקציות והישר $x=2$ מסתובב סביב ציר ה- x .



- (7) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $g(x) = \sqrt{\cos x}$.
 השטח הכלוא בין הפונקציות לישר $x = \frac{\pi}{6}$
 מסתובב סביב ציר ה- x .
 חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

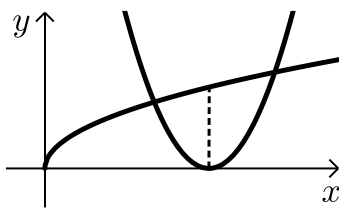


8) חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר כאשר השטח המוגבל

בין הגרפים של פונקציות: $g(x) = 2x - 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$

ציר ה- x והישר $x = 3$ מסתובב סביב ציר ה- x .

9) נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt{x}$ ו- $g(x) = (2x - 3)^2$



א. הראה כי הפונקציות נפגשות בנקודה שבה $x = 1$.

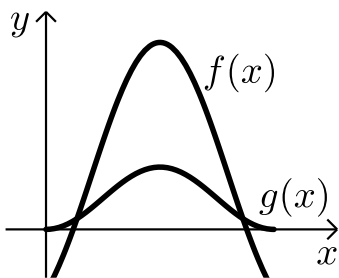
ב. השטח הכלוא בין הפונקציות ונמצא משמאל

לאנך לציר ה- x , היוצא מקודקוד הפרבולה $g(x)$

מסתובב סביב ציר ה- x .

מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

10) ענה על השאלות הבאות:



א. הוכח את הזהות: $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$.

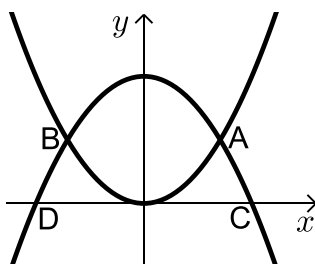
ב. נתונות הפונקציות: $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$

ו- $g(x) = 2\sin^2 x$ בתחום $[0: \pi]$.

השטח הכלוא בין גרפים של שתי הפונקציות

בתחום הנתון מסתובב סביב ציר ה- x .

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.



11) הפונקציות: $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = 8 - x^2$

נחתכות בנקודות A ו-B כמתואר באיור.

נסמן את נקודות החיתוך של גרף

הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x ב-C ו-D.

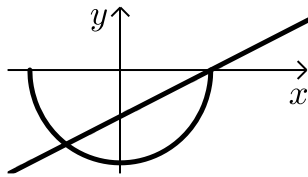
א. מצא את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.

ב. השטח הנוצר בין הגרפים של שתי הפונקציות מסתובב סביב ציר ה- x .

מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

ג. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .

מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה.

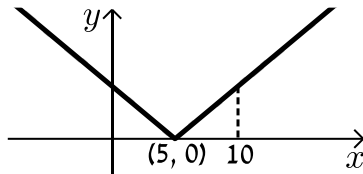


12 חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר ע"י סיבוב

השטח הכלוא בין הגרפים של

הפונקציות $f(x) = x - 5$ ו- $g(x) = -2\sqrt{25 - x^2}$

וציר ה- x סביב ציר ה- x .



13 לפניך גרף הפונקציה: $f(x) = |x - 5|$.

א. חשב את נפח הגוף שנוצר כאשר השטח בין גרף

הפונקציה בתחום $0 \leq x \leq 10$ ובין ציר ה- x

מסתובב סביב ציר ה- x .

ב. האם תוצאת החישוב של הסעיף הקודם

תשתנה אם במקום $f(x) = |x - 5|$ נשתמש

בפונקציה $g(x) = x - 5$? נמק.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad V = 69\frac{3}{5}\pi \text{ יח"נ}$$

$$(2) \quad \text{א. } (-2, 0), (2, 0) \quad \text{ב. } V = 10\frac{2}{3}\pi \text{ יח"נ}$$

$$(3) \quad \frac{V_1}{V_2} = 1$$

$$(4) \quad a = 1$$

$$(5) \quad V = \frac{1}{2}\pi + \frac{3\pi^2}{4} \approx 8.97 \text{ יח"נ}$$

$$(6) \quad V = \pi \text{ יח"נ}$$

$$(7) \quad V = 0.243 \text{ יח"נ}$$

$$(8) \quad V = \frac{5}{6}\pi \text{ יח"נ}$$

$$(9) \quad V = \frac{21}{40}\pi \text{ יח"נ}$$

$$(10) \quad \text{א. שימוש בזהות של } \sin(\alpha + \beta) \text{ ייתן את המבוקש.}$$

$$\text{ב. } V = 17.46 \text{ יח"נ}$$

$$(11) \quad \text{א. } A(2, 4), B(-2, 4), C(\sqrt{8}, 0), D(-8, 0)$$

$$\text{ב. } V = 170\frac{2}{3}\pi \text{ יח"נ} \quad \text{ג. } V = 22.42\pi \text{ יח"נ}$$

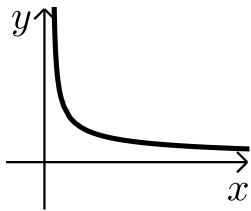
$$(12) \quad V = 240\pi \text{ יח"נ}$$

$$(13) \quad \text{א. } V = 83\frac{1}{3}\pi \text{ יח"נ} \quad \text{ב. לא.}$$

בעיות קיצון עם אינטגרלים:

שאלות:

(1) מצא את ערכו של a שבעבורו ערך האינטגרל $\int_a^{2a+1} (2x-1) dx$ מינימלי.



(2) בשרטוט נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{b-1}{\sqrt{x-1}}$, $(1 < b < 2)$.
לאיזה ערך של b השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x=b$ ו- $x=2$ וציר ה- x מקסימלי?



(3) בשרטוט נתונות הפונקציות: $f(x) = \sqrt{2x}$, $g(x) = \sqrt{6-x}$.
מהנקודות A ו-B, הנמצאות על ציר ה- x והמרחק ביניהן הוא 2, העלו אנכים לציר ה- x .
השטח הכלוא בין האנכים, שתי הפונקציות וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .
מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שנפח גוף הסיבוב המתקבל באופן זה יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות:

$$a = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$b = 1\frac{4}{9} \quad (2)$$

$$A\left(1\frac{1}{3}, 0\right) \quad (3)$$